Mathematical Concepts for Chemist

रसायनज्ञों के लिए गणित

रसायनज्ञों के लिए गणित की मूलभूत अवधारणाओं की जानकारी अत्यंत महत्वपूर्ण होती है। रसायन विज्ञान, विशेषकर भौतिक रसायन (Physical Chemistry) में विभिन्न गणितिय संकल्पनाओं (Mathematical Concepts) का बहुतायत में प्रयोग होता है।

गणितीय संकल्पना	रसायनविज्ञान में प्रयोग
I. लघुगणक (Logarithm)	i) विलयन (Solution) की सांद्रता दर्शाने में ii) परिकलन (Calculation) में
II. फलन (Functions)	i) चरों (Variables) में संबंध दर्शाने में
III. अवकलन (Differentiation)	i) फलन के परिवर्तन की दर ज्ञात करने में ii) फलनों के चरम मान (Extream Values) ज्ञात करने में

LOGARITHMIC RELATION
लघुगणकीय संबंध

A) **धात फलन** किसी धनात्मक पूर्णांक (Positive Integer) **POWER FUNCTION** 'n' तथा वास्तविक संख्यां (Real Number) 'a' के लिए धात फलन 'a^n' होता है जिसे निम्न रुप से परिभा. करते हैं

$$a^n = a \times a \times \ldots \times a \quad (n \text{ बार})$$

* विशेष :-

i) $a^n \equiv a$ की धात n (n^{th} power of a)

ii) $a^{-n} = 1/a^n$ iii) $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$

iv) $a^{m-n} = a^m \cdot a^{-n} = a^m / a^n$

v) $a^0 = 1$ vi) $a^1 = a$

vi) $a^{-1} = 1/a$ vii) $a^{1/2} = \sqrt{a}$

viii) $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$ (a का nवाँ मूल)

ix) $a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m = a^{nm}$

a^n — n: धात (power); a: आधार (base)

B) **लघुगणकीय संबंध-** धनात्मक पूर्णांक 'n' तथा वास्तविक संख्याओं

LOGARITHMIC RELATION- 'a' तथा 'x' के लिए, यदि $a^x = n$ है

तब हम परिभाषित करते हैं $\Rightarrow a^x = n \Rightarrow \log_a(n) = x$

* इसे "आधार a पर n का लघुगणक x" पढ़ते हैं।

"log of n, base a is x"

लघुगणक फलन (logarithmic function)

power घात

$$\log_a(n) = x$$

संख्याँ (number)

आधार (Base)

विशेष :- (i) ऋणात्मक संख्याँ का लघुगणक नहीं होता है।

ii) किसी आधार $(a > 1)$ पर धनात्मक संख्याँ का लघुगणक सदैव अद्वितीय (unique) होता है।

iii) किसी भी आधार पर 1 (एक) का लघुगणक सदैव शून्य (0) होता है $\log_a(1) = 0$ (क्योंकि $a^0 = 1$)

iv) किसी भी आधार पर शून्य (0) का लघुगणक अपरिभाषित होता है $\log_a(0) = -\infty$ (क्योंकि $a^{-\infty} = 0$).

vi) किसी संख्याँ a के लिए $\log_a(a) = 1$ (क्योंकि $a^1 = a$)

B2) **लघुगणक के मूल नियम-** किसी आधार a के लिए.

Basic Rule of Logarithmic Function-

* $\log_a (m \times n) = \log_a m + \log_a n$
* $\log_a \left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$
* $\log_a (m^n) = n \log_a m$
* $\log_a (m^{-n}) = -n \log_a (m)$
* $\log_a (m^{-1}) = -\log(m) = \log(1/m)$
* $\log_b n = \frac{\log_a n}{\log_a b}$
* $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

B3) **दो प्रमुख लघुगणकीय आधार**

Two Common Logarithmic Bases-

* आधार 10 ⇒ $\log_{10} n = x$ (अंकगणितीय क्रियाओं के लिए)
* आधार e ⇒ ($e = 2.71828$) $\log_e n = y$ (बीजगणितीय क्रियाओं के लिए)

आधार 10 का लघुगणक साधारण लघुगणक (Common Logarithm) कहलाता है तथा आधार e का लघुगणक प्राकृतिक लघुगणक या

नेपेरियन लघुगणक (Natural or Nepierian Logarithm) कहलाता है।

$$* \quad \log_e n = \frac{\log_{10} n}{\log_{10} e} = \frac{\log_{10} n}{0.4343} = 2.3026\,(\log_{10} n)$$

c) लघुगणक सारणी द्वारा लघुगणक ज्ञात करना -
FINDING LOG BY LOG TABLE -

किसी संख्या के साधारण लघुगणक ($\log_{10}$) में दो भाग होते हैं - प्रथम भाग पूर्णांश (Characteristic) तथा दूसरा भाग अपूर्णांश / दशमलवांश (Mantissa) कहलाता है।

c_1) पूर्णांश ज्ञात करना -
Finding Characteristic -

चूँकि

$10^1 = 10 \Rightarrow \log_{10} 10 = 1$

$10^2 = 100 \Rightarrow \log_{10} 100 = 2$

$10^3 = 1000 \Rightarrow \log_{10} 1000 = 3$

अतः x का पूर्णांश -

$1 < x < 10 \Rightarrow 0$

$11 < x < 100 \Rightarrow 1$

$100 < x \; 1000 \Rightarrow 2$

आदि

पुनश्च :

$0.1 < x < 1 \Rightarrow -1$

$0.01 < x < 0.1 \Rightarrow -2$

आदि.

C2) दशमलवांश ज्ञात करना :- (Finding Mantissa) i) सर्वप्रथम दी गई संख्याओं को चार अंकों तक सन्निकट करते हैं।

ii) संख्या के प्रथम दो अंकों को लघुगणक सारणी की पंक्ति में देखते हैं।

iii) इस पंक्ति में संख्या के तीसरे अंक का स्तम्भ देखते हैं।

iv) पुन: इसी पंक्ति में संख्या के चौथे (अंतिम अंक) का माध्य अंतर भी देखते हैं।

v). तीसरे चरण और चौथे चरण में प्राप्त अंकों को जोड़ने पर संख्या का दशमलवांश प्राप्त होता है।

उदाहरण :- $\log_{10}(23.54)$ ज्ञात कीजिए।

हल - 23.54 का पूर्णांश = 2-1 = 1 (लघुविधि)

अपूर्णांश हेतु 23.54 ⇒ 2354 पर विचार करते हैं:-

लघुगणक सारणी में 23 की पंक्ति में

5 का स्तम्भ देखें = 0.3711

4 का माध्य अंतर = 0.0007

अपूर्णांश = 0.3718

अत: $\log_{10}(23.54) = 1.3718$

पूर्णांश ↗ ↖ अपूर्णांश

पूर्णांश ज्ञात करने की लघु विधि - (Short cut Method to find Characteristic)

किसी संख्या $x>1$ का पूर्णांश सदैव उसके पूर्णांक भाग में अंकों की कुल संख्या में 1 घटाने पर प्राप्त होता है।

Examples - (A) आधार 5 पर 625 का लघुगणक ज्ञात कीजिए।
Find log, base 5, of 625.

हल :- $\log_5 625 = \log_5 (5^4) = 4 \log_5 5$ $\quad (\log a^n = n \log a)$

(गुणनखण्डों में तोड़ने पर)

$= 4\cdot(1)$ $\quad (\because \log_a a = 1)$

$\log_5(625) = 4$. <u>Ans</u>.

D) प्रतिलघुगणक ज्ञात करना - Finding Anti-logarithm - किसी संख्या $y = \log_{10} x$ के लिए प्रतिलघुगणक $x = 10^y = \text{Antilog}(y)$ द्वारा परिभाषित होता है।

*** प्रतिलघुगणक सारणी :** दशमलवांश के पहले दो अंकों की पंक्ति में तीसरे अंक का स्तम्भ देखते हैं तथा चौथे अंक का माध्य अंतर देखते हैं। दोनों अंकों को जोड़ने पर प्राप्त संख्या में दशमलव लगाते हैं या दिए गए लघुगणक की संख्या$_{+1}$ को 10 की घात का गुणा करते हैं।

Antilog (1.96660) ⇒ अपूर्णांश .9666 ⇒ .96 की रेखा में $= 9254$

6 को स्तम्भ $= 0006$

6 का माध्य अंतर $\overline{\quad 9260}$

पूर्णांश 1 ⇒ $10^2 \times .9260 \Rightarrow 92.60$