1. अमूर्त बीजगणित

(अ) समूह-

(i) **द्विआधारी या द्विचर संक्रिया-** माना G एक अरिक्त समुच्चय है, तब एक फलन $*: G \times G \to G$ पर एक द्विचर या द्विआधारी संक्रिया (binary Operation) कहलाता है।

* एक द्विचर संक्रिया $G \times G$ (कार्तीय गुणनफल) से G पर एक फलन है।

(2)- **बीजीय संरचना-** यदि '*' किसी अरिक्त समुच्चय G पर एक द्विचर संक्रिया है तो $(G, *)$ एक बीजीय संरचना है।

(3) **समूह-** एक अरिक्त समुच्चय G ग्रुप या समूह कहलाता है यदि G पर एक द्विचर संक्रिया '*' इस प्रकार परिभाषित है कि

G_i) संवरक : $a, b \in G \Rightarrow a*b \in G$ (समूहाभ)

G_{ii}) साहचर्य : $a, b, c \in G \Rightarrow a*(b*c) = (a*b)*c$ (सामि समूह)

G_{iii}) तत्समक अवयव : $\exists\, e \in G \Rightarrow a*e = e*a = a$ (एकसमूही/मोनोआयड)

G_{iv}) व्युत्क्रम अवयव : $\forall\, a \in G\ \exists\, a^{-1} \in G \Rightarrow$ ~~aa^{-1}~~ $a*a^{-1} = e = a^{-1}*a$ (समूह)

तब $(G, *)$ एक समूह कहलाता है।

(4) आबेली समूह- यदि $(G,*)$ एक समूह है तथा-

G_5) क्रमविनिमेयता - $\forall\, a, b \in G \Rightarrow a*b = b*a$

* यदि $a*b \neq b*a$ तब समूह $(G,*)$ एक अन- आबेली समूह कहलाता है।

(5) परिमित या अनंत समूह - यदि किसी समूह G में अवयवों की संख्या परिमित हो तो यह परिमित समूह कहलाता है अन्यथा अपरिमित समूह।

* यदि G एक परिमित समूह है तब G में अवयवों की संख्या G की कोटि या ग्रुपांक कहलाता है। ग्रुप की कोटि को $o(G)$ से दर्शाया जाता है।

(ब)- समूहों के प्रमुख गुणधर्म-

(1) किसी ग्रुप में तत्समक अवयव अद्वितीय होता है।

(2) किसी ग्रुप के प्रत्येक अवयव का प्रतिलोम अद्वितीय होता है।

(3) किसी ग्रुप G में $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ $\forall\, a, b \in G$.

(4) निरसन नियम i) $ab = ac \Rightarrow b = c$

ii) $ba = ca \Rightarrow b = c$ $\forall\, a, b, c \in G$.

(5) यदि $a, b \in G$ तब $ax = b$ तथा $ya = b$ के G में अद्वितीय हल होते हैं।

उदा० - * यदि $A(S)$, एक अरिक्त समुच्चय S से S में सभी एकैकी आच्छादक फलनों का समुच्चय हो, तो सिद्ध कीजिए कि $A(S)$, फलनों के संयोजन के अंतर्गत एक समूह है परंतु आबेली नहीं।

* तीन अवयवों का समूह अनिवार्यतः आबेली होता है।

* यदि समूह G का प्रत्येक अवयव स्वयं का व्युत्क्रम हो तो G एक आबेली समूह होता है।

* चार अवयवों का समूह अनिवार्यतः आबेली होता है।

* इकाई के n, nवें मूलों का समुच्चय गुणन के सापेक्ष कोटि n का एक परिमित आबेली ग्रुप बनाता है। उदा० $\{1, -1, i, -i\}$

* योग मॉड्युलो m - यदि a तथा b दो पूर्णांक हों, ~~तब~~ तो a व b का योग मॉड्युलो $a +_m b$ द्वारा दर्शाया जाता है और निम्न रूप से परिभाषित किया जाता है - $a +_m b = r, \quad 0 \le r < m$

जहाँ r, $a+b$ को m द्वारा विभाजित किए जाने पर प्राप्त न्यूनतम ऋणेतर अवशेष है।

* $2 +_5 3 = 0$ क्योंकि $2+3=5$, $5|5 = 1$ (अशेष $=0$)
* $2 +_5 7 = 4$ क्योंकि $2+7=9$, $5|9 = 1$ (अशेष $=4$)

* गुणन मॉड्युलो m - यदि a और b दो पूर्णांक हों तो a तथा b के गुणन मॉड्युलो m को $a \times_m b$ द्वारा दर्शाया जाता है तथा

$$a \times_m b = c \ , \ 0 \leq c < m$$ द्वारा परिभाषित करते हैं

जहाँ c न्यूनतम ऋणेत्तर अवशेष है जब $a \times b$ को m द्वारा विभाजित किया जाता है।

* $2 \times_5 3 = 1$ क्योंकि $2 \times 3 = 6$, $5|6 = 1$ (अशेष 1)
* $2 \times_5 7 = 4$ क्योंकि $2 \times 7 = 14$, $5|14 = 2$ (अशेष 4)

* समशेष मॉड्युलो m - यदि a और b दो पूर्णांक हों तो a, b से समशेष मॉड्युलो m है' को $a \equiv b \pmod{m}$ से सूचित करते हैं तथा इसका अर्थ हो $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a-b$, m से पूर्णतः विभाजित हो अर्थात $m \mid (a-b)$.
* अवशेष मॉड्युलो m - माना $I = \{\cdots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}$ पूर्णांकों का समुच्चय है। यदि $a \in I$ तब $[a]$ को I का अवशेष कक्षा मॉड्युलो m

कहा जाता है, जहाँ $[a] = \{x : x \in I$ तथा m, $x-a$ को विभाजित करता है $\}$

* यदि m एक धन पूर्णांक है तब m के लिए अवशेष कक्षाएँ होंगी - $[0], [1], [2] \ldots [m-1]$ जहाँ -

$$[0] = \{\ldots -2m, -m, 0, m, 2m \ldots\}$$

$$[1] = \{\ldots -2m+1, -m+1, 1, m+1, 2m+1 \ldots\}$$

$$[2] = \{\ldots -2m+2, -m+2, 2, m+2, 2m+2 \ldots\}$$

......

* $[m] = [0]$, $[m+1] = [1]$, $[m+2] = [2]$ ....

* अवशेष कक्षाओं का योग - यदि $[a], [b] \in I_m$ हो तो -

$$[a] +_m [b] = [a+b] = [c]$$

जहाँ $a +_m b = c$

* अवशेष कक्षाओं का गुणनफल - यदि $[a], [b] \in I_m$ हो तो -

$$[a] \times_m [b] = [ab] = [c]$$

जहाँ $a \times_m b = c$

* समशेष मॉड्युलो m एक तुल्यता संबंध है।

* अवशेष वर्ग मॉड्युलो m का समुच्चय अवशेष वर्गों के योग के सापेक्ष कोटि m का एक आबेली ग्रुप है।

* i) $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a +_m c = b +_m c$

ii) $a +_m b \equiv (a+b) \pmod{m}$

* एकघात समशेषता - यदि a, b तथा n स्थिर पूर्णांक हों तो ऐसा पूर्णांक $x = x_1$ जिससे कि $n \mid (ax_1 - b)$, एकघात समशेषता $ax \equiv b \pmod{n}$ का हल कहा जाता है।

* यदि एक पूर्णांक x_1, $ax \equiv b \pmod{n}$ का हल हो तथा x_2 कोई अन्य पूर्णांक इस प्रकार हो कि $x_2 \equiv x_1 \pmod{n}$ तो x_2 भी $ax \equiv b \pmod{n}$ का हल होगा।

* यदि $a \equiv b \pmod{n}$ तथा $c \equiv d \pmod{n}$ हो तो -

i) $a + c = b + d \pmod{n}$

ii) $ac = bd \pmod{n}$

* यदि $ab \equiv ac \pmod{n}$ और a, n के परस्पर अभाज्य हों, तो - $b \equiv c \pmod{n}$

* समशेषता $ax \equiv b \pmod{n}$ का हल संभव है यदि और केवल यदि a और n का महत्तम सार्वभाजक (GCD) b को विभाजित करे। यदि GCD, d, b को विभाजित करता है तो सर्वसमता माड्युलो n में ठीक d असमशेष हल होते हैं।

* To solve $xa \equiv b \pmod{n}$ - gcd (a, n) must divide b.

उदा. समशेषता $35x = 14 \pmod{21}$ को हल कीजिए।

चूँकि $\gcd(35, 21) = 7$ तथा $7 \mid 14$ अतः समी. के 7 हल होंगे।

$$35x = 14 \pmod{21} \Rightarrow 5x = 2 \pmod{3}$$

$$5x \equiv 2+3 \pmod{3} \qquad \left(2 \equiv \underset{+3}{2} \pmod{3}\right)$$

$$5x \equiv 5 \pmod{3}$$

$$x \equiv 1 \pmod{3}$$

7 असमशेष हल है :- $x = 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19 \pmod{21}$.

(स)- समूह के अवयव की कोटि -

* समूह के अवयव की कोटि - माना किसी समूह G में a कोई स्वेच्छ अवयव है। तब a की कोटि को o(a) से दर्शाया जाता है तथा o(a) वह न्यूनतम धनात्मक पूर्णांक है जिसके लिए $a^n = e$ जहाँ e, समूह G में तत्समक अवयव है।

* यदि ऐसे किसी धन पूर्णांक n का अस्तित्व नहीं है कि $a^n = e$ तब हम कहते हैं कि a अनंत कोटि का (या शून्य कोटि) अवयव है।

* यदि G में संक्रिया गुणन है तब $a^n = e$ होने पर $o(a) = n$

यदि G में संक्रिया योग है तब $na = e$ होने पर $o(a) = n$.

* समूह G के अवयवों की संख्या G की कोटि होती है।

* समूह G के तत्समक अवयव की कोटि एक होती है।

* मान $a \in G$ तथा n कोई पूर्णांक है तब a के घातों को हम निम्न रूप में परिभाषित हैं:-

i) $a^n = a.a\ldots n$ पदों तक $n>0$

ii) $a^n = e$ यदि $n=0$

iii) $a^n = (a^{-1})^m$, यदि $n=-m$, $m>0$.

* आवर्ती समूह या विलोटन समूह -

एक समूह G आवर्ती समूह या विलोटन समूह (Periodic / Torsion Group) कहलाता है यदि G का प्रत्येक अवयव पारिमित कोटि का हो। यदि G के तत्समक अवयव को छोड कर कोई भी अवयव पारिमित कोटि का नहीं होता तो G विलोटन मुक्त (Torision Free) समूह कहलाता है। उदा॰ विलोटन $\Rightarrow \{1, \omega, \omega^2\}$ विलोटन मुक्त $(\mathbb{R}_0, \cdot)$, $(\mathbb{Z}, +)$

* एक परिमित समूह के प्रत्येक अवयव की कोटि परिमित और समूह की कोटि से छोटी या बराबर होती है।

* किसी समूह G के अवयव a के लिए $o(a) = o(a^{-1})$

* यदि a तथा $x \in G$ तब $o(a) = o(x^{-1}ax)$
* यदि $a \in G$ और $o(a) = n$ तब $o(a^r) \leq n$ जहाँ $0 \leq r \leq n$.
* यदि $a \in G$ और $o(a) = n$ तब $a^m = e \Leftrightarrow n | m$ या $m = nr$
* यदि $a \in G$ और $o(a) = n$ तब किसी p, जो n से अभाज्य है, के लिए a^p की कोटि भी n होगी।
* यदि किसी समूह के प्रत्येक अवयव की कोटि (तत्समक को छोड़ कर) 2 है तो समूह आबेली होता है।
* यदि किसी समूह G में केवल दो अवयव हैं तब $(ab)^2 = a^2b^2$ यदि और केवल यदि G आबेली है।
* यदि किसी समूह में a और b क्रमविनिमेय हैं तब a^{-1} और b^{-1}, a और b^{-1}, और a^{-1} और b भी क्रमविनिमेय होंगे।
* यदि G एक सम कोटि का ग्रुप है तो $a \neq e$, G में एक अवयव होगा ~~यदि~~ और $a^2 = e$.
* चार या उससे कम अवयवों वाला प्रत्येक समूह आबेली होता है।
* $a \in G$ तब $a^{o(G)} = e$.

(द) उपसमूह -

① **कॉम्प्लेक्स -** यदि H, किसी समूह G का एक अरिक्त उपसमुच्चय हो, तो H समूह G का एक कॉम्प्लेक्स कहलाता है।

* माना कि H, ग्रुप $(G,*)$ का एक कॉम्प्लेक्स है। तब हम कहते हैं कि H, G में संयोजन * के लिए स्थिर (STABLE) है और $*'$, H में एक प्रेरित संयोजन है यदि $a, b \in H \Rightarrow a*b \in H$

② **उपसमूह -** किसी समूह $(G,*)$ का कोई अरिक्त उपसमुच्चय H, समूह $(G,*)$ का एक उपसमूह कहलाता है यदि $(H,*)$ स्वयं एक समूह हो।

उदा. - $(Q,+)$, समूह $(R,+)$ का एक उपसमूह है।

* यदि $H=G$ या $H=\{e\}$ तथा G एक समूह हो, तो H, G का तुच्छ उपसमूह या विषम उपसमूह कहलाता है।

* यदि $H \subseteq G$ परंतु $(H \neq G)$ तथा $(H \neq \{e\})$ तब H समूह G का एक उचित या अतुच्छ उपसमूह कहलाता है।

* $(I,+)$ समूह $(Q,+)$ का एक उचित उपसमूह है।

(3) एक समूह के कॉम्प्लेक्सों का बीजगणित –

यदि H और K किसी समूह G के दो कॉम्प्लेक्स हों, तो,

(ii) $HK = \{hk : h \in H, k \in K\}$ $HK \subseteq G$

(ii) $H^{-1} = \{h^{-1} : h \in H\}$, $H^{-1} \subseteq G$

* यदि H तथा K किसी समूह के दो कॉम्प्लेक्स हैं तब

$$(HK)^{-1} = K^{-1}H^{-1}$$

* यदि H, G का उपसमूह है तब $H^{-1} = H$ परंतु विलोम सत्य नहीं।
* $H = \{1\}$, गुणात्मक समूह $G = \{1, -1\}$ का एक काम्प्लेक्स है।
* $HH = H$
* यदि e, G का तत्समक अवयव है तब e, H का भी तत्समक अवयव होगा।
* यदि H, समूह G का अरिक्त उपसमुच्चय है, तब H, G का एक उपसमूह होता है यदि और केवल यदि

  (1) $a, b \in H \Rightarrow ab \in H$

  (2) $a \in H \Rightarrow a^{-1} \in H$ जहाँ a^{-1}, $a \in G$ का प्रतिलोम है।

* किसी समूह G के एक अरिक्त उपसमुच्चय H के एक उपसमूह होने के लिए आवश्यक और पर्याप्त प्रातिबंध यह है कि

$a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$, b^{-1} b का G में प्रतिलोम है।

* किसी समूह G का एक अरिक्त समुच्चय H, G का एक उपसमूह होगा यदि और केवल यदि $HH^{-1} = H$

* H, यदि G का एक अरिक्त परिमित समुच्चय है तब H, एक कॉम्प्लेक्स एक ~~उपसमुच्चय~~ उपसमूह होगा यदि $a \in H, b \in H \Rightarrow ab \in H$.

* H, K, G के दो उपसमूह हैं तो HK, G का एक उपसमूह होगा यदि और केवल यदि $HK = KH$.

* यदि H_1 तथा H_2, G के दो उपसमूह हैं तब $H_1 \cap H_2$ भी G का एक उपसमूह होगा। एक समूह के उपसमूहों का स्वेच्छ सर्वनिष्ठ पुनः एक उपग्रुप होता है।

* किसी समूह के दो उपसमूहों का संघ एक उपसमूह होता है यदि और केवल यदि वे एक दूसरे में अंतर्विष्ट हो।

* यदि $a \in G$ एक स्थिर अवयव है तब समुच्चय $N(a) = \{x \in G : ax = xa\}$ G में a का प्रसामान्य उपसमूह होता है। * $N(a)$ एक उपसमूह होता है।

* एक समूह G में $Z = \{z : zx = xz \ \forall x \in G\}$, G का केन्द्र कहलाता है। * Z, G का उपसमूह होता है।

* किसी आबेली समूह G में कोटि दो के समस्त अवयवों का समुच्चय $H = \{a \in G : a^2 = e\}$ एक उपसमूह होता है।

* किसी आबेली समूह G में परिमित कोटि का प्रत्येक समुच्चय एक उपसमूह होता है।

* एक ऐसा समूह जो उचित उपसमूह नहीं रखता है - या तो तत्समक समूह है या समूह की कोटि अभाज्य है।

(द₂). उपसमुच्चयों से जनित उपसमूह -

माना M किसी समूह G का उपसमुच्चय है तब M से जनित उपसमूह को (M) या {M} से दर्शाते हैं जो G का सबसे छोटा उपसमूह होता है जो M को अंतर्विष्ट करता है। M को G का जनक कहते हैं यदि $G = (M)$

* यदि $M \subseteq G$ तब (M) का G में अद्वितीय अस्तित्व होता है।